

नामांक

Roll No.

Sl.No. :

No. of Questions – 23

No. of Printed Pages – 15

SS-15-Mathematics

Tear Here

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2023

SENIOR SECONDARY EXAMINATION, 2023

गणित

MATHEMATICS

समय : 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 80

प्रश्न पत्र को खोलने के लिए यहाँ फाँड़ें
TEAR HERE TO OPEN THE QUESTION PAPER

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश

GENERAL INSTRUCTIONS TO THE EXAMINEES :

1) परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।

Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.

2) सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।

All the questions are compulsory.

3) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।

Write the answer to each question in the given answer-book only.

4) जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.

खण्ड - अ
SECTION - A

1) बहुविकल्पीय प्रश्न :

Multiple Choice Questions :

i) यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ तथा $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ तब $(f \circ g)(x)$ बराबर है। [1]

अ) $\sin x^2$ ✓

ब) $\sin x$

स) $\sin^2 x^2$

द) $\sin^2 x$

If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ then $(f \circ g)(x)$ is equal to :

A) $\sin x^2$

B) $\sin x$

C) $\sin^2 x^2$

D) $\sin^2 x$

ii) यदि किसी आव्यूह की कोटि $m \times n$ हैं, तो इसमें अवयवों की संख्या हैं - [1]

अ) m ✓

ब) n

स) mn ✓

द) $m - n$

If the order of a matrix is $m \times n$, then the number of elements in it are -

A) m

B) n

C) mn

D) $m - n$

iii) यदि $y = x \cdot \log_e x$, तो $\frac{d^2 y}{dx^2}$ का मान होगा - [1]

अ) $\frac{1}{1+x}$ ✓

ब) $\frac{1}{x}$

स) $\log_e(1+x)$

द) $1 + \log_e x$

If $y = x \cdot \log_e x$, then the value of $\frac{d^2 y}{dx^2}$ will be -

A) $\frac{1}{1+x}$

B) $\frac{1}{x}$

C) $\log_e(1+x)$

D) $1 + \log_e x$

iv) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का x के सापेक्ष प्रति अवकलज है -

[1]

अ) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

ब) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

स) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

द) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

The anti derivative of $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ with respect to x -

A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

v) $\int \cos^2 x dx$ का मान है -

[1]

अ) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

ब) $x^2 + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

स) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\sin x + C$

द) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

The value of $\int \cos^2 x dx$ is -

A) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

B) $x^2 + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

C) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\sin x + C$

D) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

vi) वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है -

[1]

अ) $\frac{33}{2}$

ब) $\frac{8}{3}$

स) $\frac{32}{3}$

द) $\frac{4}{3}$

The area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = 4$ is -

A) $\frac{33}{2}$

B) $\frac{8}{3}$

C) $\frac{32}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

vii) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है -

[1]

अ) 0 ✓

ब) -1

स) 1

द) 3

The value of $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ is -

A) 0

B) -1

C) 1

D) 3

viii) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ व 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ हो, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण है -

[1]

अ) $\frac{\pi}{2}$

ब) $\frac{\pi}{3}$

स) $\frac{\pi}{6}$

द) $\frac{\pi}{4}$ ✓

If the magnitude of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are $\sqrt{3}$ and 2 respectively and $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$, then the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is -

A) $\frac{\pi}{2}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{4}$

ix) x, y और z -अक्षों पर क्रमशः 2, 3 और 4 अंतः खंड काटने वाले समतल का समीकरण है - [1]

अ) $4x + 6y + 3z = 12$

ब) $6x + 4y + 3z = 12$ ✓

स) $3x + 4y + 6z = 12$

द) $5x + 4y + 3z = 0$

The equation of the plane with intercepts of 2, 3 and 4 on the x, y and z -axes respectively is -

A) $4x + 6y + 3z = 12$

B) $6x + 4y + 3z = 12$

C) $3x + 4y + 6z = 12$

D) $5x + 4y + 3z = 0$

x) यदि $P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ हो, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान है - [1]

अ) $\frac{4}{9}$ ✓

ब) $\frac{7}{9}$

स) $\frac{5}{9}$

द) $\frac{5}{13}$

If $P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, then the value of $P\left(\frac{A}{B}\right)$ is -

A) $\frac{4}{9}$

B) $\frac{7}{9}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{5}{13}$

2) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

Fill in the blanks :

i) यदि $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ हो, तो $(x + y) = \dots\dots\dots$ होगा। [1]

If $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$, then $(x + y) = \dots\dots\dots$.

ii) $\cos(\sqrt{x})$ का x के सापेक्ष अवकलन $\dots\dots\dots$ है। [1]

The derivative of $\cos(\sqrt{x})$ with respect to x is $\dots\dots\dots$.

iii) वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता का मान $\dots\dots\dots$ होगा। [1]

The slope of the tangent line at $x = 4$ to the curve $y = 3x^4 - 4x$ will be $\dots\dots\dots$.

iv) $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ का मान $\dots\dots\dots$ होगा। [1]

The value of $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ will be $\dots\dots\dots$.

v) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 7)$, $(-4, 3, -6)$ और $(2, 9, 2)$ है, तो AB और CD रेखाओं के बीच का न्यून कोण $\dots\dots\dots$ होगा। [1]

If the coordinates of the points A, B, C and D are then $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 7)$, $(-4, 3, -6)$ and $(2, 9, 2)$ respectively, the acute angle between the lines AB and CD will be $\dots\dots\dots$.

vi) यदि दो निष्पक्ष पासों की एक जोड़ी को एक बार उछाला जाता है, तो दोनों पासों पर अंकों का योग 5 होने की प्रायिकता का मान $\dots\dots\dots$ होगा। [1]

If a pair of two unbiased dice is thrown once, then the probability that the sum of the numbers on both the dice is 5 will be $\dots\dots\dots$.

3) अति लघुत्तरात्मक प्रश्न :

Very short answer type questions :

i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

[1]

Find the principal value of $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

ii) निम्नलिखित समीकरण से x तथा y के मानों को ज्ञात कीजिए :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

[1]

Find the values of x and y from the following equation :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

iii) सारणिक $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञान कीजिए।

[1]

Evaluate $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

iv) $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सातत्य की जाँच कीजिए।

[1]

Examine the continuity of the function $f(x) = 2x^2 - 1$ at $x = 3$.

v) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रूप्यों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए, जब $x = 7$ है।

[1]

The total revenue in Rupees received from the sale of x units of a product is given by $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$. Find the marginal revenue, when $x = 7$.

vi) प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2 = 9x$; $x = 2$, $x = 4$ एवं x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]
Find the area of the region bounded by $y^2 = 9x$; $x = 2$, $x = 4$ and the x -axis in the first quadrant.

- vii) बिन्दुओं $P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। [1]

Find the position vector of a point R which internally divides the line joining two points P and Q whose position vectors are $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ and $(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ respectively in the ratio 2 : 1.

- viii) सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

Find the angle between the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.

- ix) दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2)$ और $(3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है। [1]

Show that the line through the points $(1, -1, 2)$ and $(3, 4, -2)$ is perpendicular to the line through the points $(0, 3, 2)$ and $(3, 5, 6)$.

- x) एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [1]

The cartesian equation of a line is $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$. Write its vector form.

- xi) समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गए अंतः खंडों को ज्ञात कीजिए। [1]

Find the intercepts cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on co-ordinate axes.

- xii) एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान ले A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए। [1]

An unbiased die is thrown twice. Let the event A be 'odd number on the first throw' and B the event 'odd number on the second throw'. Check the independence of the events A and B.

SECTION - B

लघुउत्तरीय प्रश्न :

Short answer type questions :

- 4) यदि $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए की सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $(f \circ f)(x) = x$ है। [2]

If $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \frac{2}{3}$, show that $(f \circ f)(x) = x$ for all $x \neq \frac{2}{3}$.

- 5) यदि $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए $A' A = I$ [2]

If $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$, then verify that $A' A = I$.

- 6) सिद्ध कीजिए की $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$. [2]

Prove that $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$.

- 7) दर्शाइए की बिन्दु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं। [2]

Show that the points $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ and $C(c, a+b)$ are collinear.

- 8) सिद्ध कीजिए की फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत नहीं है। [2]

Prove that the function f given by $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ is not continuous at $x = 0$.

- 9) अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f [2]

- i) वर्धमान है
ii) हासमान है।

Find the intervals in which the function f given by $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is

- i) Increasing
ii) Decreasing

- 10) x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए। [2]

Find the approximate change in the volume of a cube of side x meters caused by increasing the side by 2%.

- 11) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Evaluate $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$.

- 12) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलंब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum.

- 13) y -अक्ष को मूल बिंदू पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। [2]
Form the differential equation of the family of circles touching the y -axis at origin.

- 14) दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [2]

For given vectors, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a} + \vec{b}$.

- 15) समतलों, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ और $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ है, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [2]

Find the angle between the planes whose vector equations are $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ and $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$.

- 16) यदि एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला गया, तो ठीक छःचित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2]
If a fair coin is tossed 10 times, find the probability of exactly six heads.

खण्ड - स
SECTION - C

- 17) यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [3]

If $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, then find the value of x .

अथवा/OR

दर्शाइए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$. [3]

Show that $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$.

18) x के सापेक्ष $(\log x)^{\cos x}$ का अवकलन कीजिए।

Differentiate $(\log x)^{\cos x}$ with respect to x .

अथवा/OR

यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है, तो दर्शाइए की $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

If $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$, show that $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

19) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$.

अथवा/OR

$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$.

20) दर्शाइए की सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं।

Show that the vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ form the vertices of a right angled triangle.

अथवा/OR

एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(2, 3, 1)$ हैं।

Find the area of a triangle having the points $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$ as its vertices.

SECTION - D

21) $\int_{-1}^1 5x^4 \sqrt{x^5 + 1} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

[4]

Evaluate $\int_{-1}^1 5x^4 \sqrt{x^5 + 1} dx$.

अथवा/OR

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

[4]

Evaluate $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$.

22) किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में Rs. 1,000 जमा कराये जाते हैं। ज्ञात कीजिए की 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जायेगी ($e^{0.5} = 1.648$). [4]

In a bank, principal increases continuously at the rate of 5% per year. An amount of Rs. 1,000 is deposited with this bank. How much will it worth after 10 years ($e^{0.5} = 1.648$).

अथवा/OR

अवकल समीकरण $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिये। [4]

Find the general solution of the differential equation $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$.

23) निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए। [4]

$3x + 5y \leq 15$, $5x + 2y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Maximize $Z = 5x + 3y$ subject to constraints $3x + 5y \leq 15$, $5x + 2y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method.

अथवा/OR

निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 200x + 500y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए। [4]

$x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Minimize $Z = 200x + 500y$ subject to constraints $x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method.

